(2024), 3 (2): 129–140 **Scientica** 3021-8209

Jurnal Ilmiah Sain dan Teknologi

ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK TIPE SIR (*SUSCEPTIBLE, INFECTIOUS, RECOVERED*) PADA DINAMIKA PENYEBARAN PENYAKIT MALARIA DI KOTA AMBON

Susiatut Thoifah [1], Zumrotus Sya'diyah [2], Tri Siwi Nasrulyati [3]
Program Studi Pendidikan Matematika, Universitas Darussalam Ambon
Email: thoiffah.s@gmail.com

Abstrak
Berdasarkan Riskesdas Tahun 2013, bahwa Maluku merupakan salah satu daerah provinsi yang termasuk dalam 5 provinsi dengan insiden dan prevalensi malaria tertinggi di Indonesia yang hingga kini masih memiliki prevalensi malaria diatas angka nasional. Hal ini menjadi suatu masalah yang perlu dilakukan penanganan secara serius dan bijak agar penyebaran penyakit malaria tersebut dapat dikendalikan, diantaranya dengan memanfaatkan kajian ilmu matematika yang memiliki kapabilitas dalam bidang ini yaitu pemodelan matematika. Penelitian ini membahas perilaku penyebaran penyakit malaria dengan menggunakan model epidemik tipe SIR (*Susceptible*, *Infectious*, *Recovered*). Pada tugas akhir ini dianalisis kestabilan titik kesetimbangan pada model deterministik dan ditentukan pula *Basic Reproduction Ratio* (R_0) serta nilai ambang batasnya, dimana kestabilan titik setimbang ditentukan melalui linearisasi model deterministiknya tersebut. Studi kasus dalam penelitian ini mengarah pada data jumlah penderita malaria di Kota Ambon tahun 2012-2013 yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Maluku. Dari hasil proses analisis diketahui bahwa model epidemik mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit $\left[E_0 = [S, I, R] = [1\,, 0, 0]\right]$ dan titik kesetimbangan epidemik $E_i = [S, I, R] = [5{,}497808; -3{,}680341; -0{,}818288]$. Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan ditentukan oleh bilangan reproduksi dasar (R_0), yaitu bilangan yang menentukan ada tidaknya penyebaran penyakit pada suatu populasi. Bilangan reproduksi dasar penyakit malaria di Kota Ambon sebesar 0,181891, dengan nilai ambang batas 2,990251. Hasil ini menunjukkan bahwa tidak akan terjadi epidemi penyakit malaria, karena lambat laun penyakit malaria di Kota Ambon akan berkurang dan pada akhirnya akan menghilang.

Sejarah Artikel
Submitted: 15 November 2024
Accepted: 21 November 2024
Published: 22 November 2024

Kata Kunci
Bilangan Reproduksi Dasar (R_0), Kesetimbangan dan Kestabilan, Malaria, Model SIR.

PENDAHULUAN

Malaria merupakan penyakit infeksi yang menjadi isu kesehatan masyarakat utama di tingkat global. Kejadian luar biasa malaria yang sering terjadi telah memberikan dampak signifikan terhadap kualitas hidup, perekonomian, dan bahkan mengancam kelangsungan hidup manusia. (Kemenkes RI, 2011).

Berdasarkan Riset Kesehatan Dasar (Riskesdas) Tahun 2013 menunjukkan bahwa Data prevalensi malaria tahun 2013 menunjukkan bahwa 6,0% penduduk Indonesia terinfeksi malaria. Papua, Nusa Tenggara Timur, Papua Barat, Sulawesi Tengah, dan Maluku menjadi lima provinsi dengan prevalensi tertinggi, di mana Papua menduduki peringkat pertama dengan angka prevalensi sebesar 28,6%. (Kemenkes, 2013).

Ancaman serius yang ditimbulkan oleh penyebaran penyakit menular yang tak terkendali mengharuskan dilakukannya penelitian mendalam mengenai pola penyebaran penyakit tersebut. Model deterministik sederhana, yang pertama kali dirumuskan oleh Anderson, Grey, dan Kermarck, merupakan dasar dari model epidemik modern. Model ini digunakan untuk memahami bagaimana penyakit menyebar dalam suatu populasi. (Hethcote, 2011).

Dalam penelitian ini, akan dikaji model matematika pada penyebaran epidemik penyakit malaria di daerah Maluku, yakni di Kota Ambon dengan menggunakan tipe model epidemik SIR (*Susceptible, Infectious, Recovered*).

Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dikaji adalah sebagai berikut :

1. Bagaimana bentuk tipe model epidemik SIR dalam memodelkan penyebaran penyakit malaria ?
2. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan, serta *Basic Reproduction Ratio* (R_0) pada penyebaran penyakit malaria ?
3. Bagaimana interpretasi dari hasil model penyebaran penyakit malaria di kota Ambon ?

Asumsi Masalah

Adapun asumsi-asumsi yang penulis gunakan dalam penelitian ini, yakni sebagai berikut :

1. Populasi dianggap konstan.
2. Populasi dianggap homogen, setiap individu memiliki peluang yang sama terinfeksi penyakit.
3. Individu dalam populasi saling berinteraksi antara satu dengan yang lainnya.
4. Setiap individu tidak mendapat perlakuan khusus seperti vaksinasi atau imunisasi.
5. Populasi kontinu terhadap waktu.

Manfaat Penelitian

Melalui penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat yakni meliputi :

1. Manfaat Teoritis
   a. Dalam kaitannya dengan pembangunan Pendidikan Tinggi di Indonesia, diharapkan dapat memberikan sumbangan pemikiran dalam rangka memperluas atau memperdalam wawasan mengenai model matematika, khususnya pola penyebaran penyakit malaria jenis SIR.
   b. Bagi pengembangan ilmu pengetahuan, penelitian ini dapat menjadi referensi/ acuan bagi peneliti yang lain.
2. Manfaat Praktis
   a. Menggunakan model SIR, kita bisa memberikan informasi yang akurat kepada masyarakat dan pihak terkait mengenai potensi penyebaran suatu penyakit menular dalam populasi. Dengan menghitung nilai R0, kita bisa memprediksi apakah penyakit tersebut akan menjadi epidemi.
   b. Hasil perhitungan R0 pada penelitian ini dapat menjadi dasar bagi pihak kesehatan dalam menentukan langkah-langkah pengendalian yang efektif, seperti menentukan cakupan vaksinasi minimal untuk mencegah terjadinya wabah.

TINJAUAN PUSTAKA

Gambaran Umum Penyakit Malaria

Malaria adalah suatu istilah yang diperkenalkan oleh Dr. Francisco Torti pada abad ke-17, malaria berasal dari bahasa Italia yaitu *mal* artinya kotor, sedangkan *aria* artinya udara, sehingga malaria dapat diartikan ”udara yang kotor” (Hanafy, 2013).

Malaria adalah penyakit yang mengancam keselamatan jiwa yang disebabkan oleh parasit yang ditularkan ke individu melalui gigitan nyamuk yang terinfeksi. Malaria dapat dicegah dan disembuhkan. Malaria merupakan salah satu penyakit yang mempunyai penyebaran luas. Vektor malaria adalah nyamuk *anopheles*. Malaria disebabkan parasit jenis *plasmodium.* Penyebab penyakit malaria adalah genus *Plasmodi,* famili *Plasmodiidae* dan ordo *Coccidiidae* (Hiswani, 2004).

Sampai saat ini di Indonesia dikenal 4 macam parasit malaria di Indonesia, yaitu:

1. *Plasmodium falciparum* penyebab malaria tropika yang sering menyebabkan malaria yang berat.
2. *Plasmodium vivax* penyebab malaria tertina.
3. *Plasmodium malaria* penyebab malaria quartana.
4. *Plasmodium ovale* jenis ini jarang sekali dijumpai di Indonesia, karena umumnya banyak kasusnya terjadi di Afrika dan Pasifik Barat (Hiswani, 2004).

Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika merupakan bidang matematika yang berusaha untuk merepresentasi dan menjelaskan sistem-sistem fisik atau problem pada dunia riil dalam pernyataan matematik, sehingga diperoleh pemahaman dari problem dunia riil menjadi lebih tepat. Representasi matematika yang dihasilkan dari proses ini dikenal sebagai "Model Matematika" (Widowati, 2007).

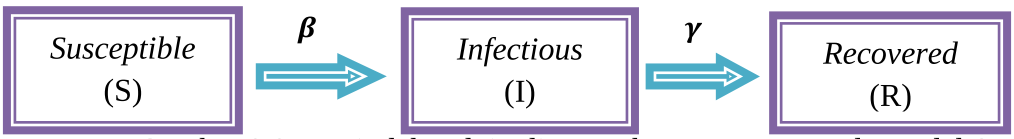
Pemodelan matematika adalah suatu proses yang menjalani tiga tahap berikut (Pamuntjak dan Santosa dalam Nashrullah, 2013 : 1) :

a. Perumusan model matematika
b. Penyelesaian dan/atau analisis model matematika
c. Penginterpretasian hasil ke situasi nyata

Model Epidemi

Perilaku dinamik dari sistem untuk menganalisis dinamika penyebaran penyakit terdapat beberapa model matematika yang sering digunakan diantaranya SI, SIS, SIR, SIRS, SEIR,MSEIR dan termasuk model SVID. Kelas *S* (*susceptible*) digunakan untuk mewakili individu-individu yang rentan terhadap infeksi virus, kemudian kelas *I* (*infectious*) digunakan untuk mewakili individu-individu yang telah terinfeksi dan mampu menularkan atau menyebarkan penyakit ke individu pada populasi rentan, untuk kelas *R* (*recovered*) digunakan untuk mewakili individu-individu terinfeksi yang telah sembuh dari penyakit dan memiliki kekebalan permanen yang artinya individu tersebut tidak akan terinfeksi lagi untuk jenis penyakit yang sama. Jumlah keseluruhan dari kelompok tersebut adalah:

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$$



Gambar 2.2 Perpindahan laju diantara kompartemen pada model SIR
(Keeling:2004)

Keterangan :
$N(t)$ = ukuran populasi
$S(t)$ = jumlah individu sehat pada waktu t.
$I(t)$ = jumlah individu terinfeksi pada waktu t.
$R(t)$ = jumlah individu yang sembuh pada waktu t.
β = laju infeksi (*contact rate*).
γ = laju pemulihan (*recovery rate*).

Ruang Lingkup Materi
Persamaan Diferensial
Definisi 2.1
Sebuah persamaan yang mengandung derivatif/diferensial dari suatu atau lebih variabel terikat terhadap suatu atau lebih variabel bebas disebut persamaan diferensial (PD). Jika hanya satu variabel bebasnya, maka persamaannya disebut persamaan diferensial biasa. Sedangkan jika variabel bebasnya lebih dari satu maka persamaannya disebut persamaan diferensial parsial (Baiduri dalam Abadiyah, 2009).
Contoh:
1) $y' + xy = 3$
2) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$
(Finizio dkk. dalam Abadiyah, 2009: 9).

Jika $y(x)$ adalah suatu fungsi satu variabel, maka x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas. Persamaan (1) adalah contoh PDB. Sedangkan persamaan (2) adalah contoh PDP (Sahid, 2012).

Persamaan Diferensial Linier dan Persamaan Diferensial Tak Linier
Definisi 2.2
Persamaan diferensial linier ialah persamaan diferensial yang berpangkat satu dalam peubah tak bebas dan turunan-turunannya, yaitu persamaan diferensial yang berbentuk:

$$a_m(x)\frac{d^m y}{dx^m} + a_{m-1}(x)\frac{d^{(m-1)}y}{dx^{m-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)\,y = r\,(x) \qquad (2.1)$$

Selanjutnya, persamaan diferensial yang bukan merupakan persamaan linier disebut persamaan diferensial tak linier. Dengan demikian persamaan diferensial $F\,(x, y, y', \ldots, y^m) = 0$ adalah persamaan tak linier, jika salah satu dari yang berikut dipenuhi oleh F :
a. F tak berbentuk polinom dalam $y, y', \ldots, y^m$.
b. F berbentuk polinom berpangkat ≥ 2 dalam $y, y', \ldots, y^m$.
(Pamuntjak dkk. dalam Abadiyah, 2009).

Sistem Persamaan Diferensial Linier dan Sistem Persamaan Diferensial Tak Linier

Sistem persamaan diferensial linier adalah persamaan yang terdiri lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Sistem persamaan diferensial linier dengan n buah fungsi-fungsi yang tak diketahui berbentuk :

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_i + f_i(t), \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Sistem persamaan diferensial tak linier adalah persamaan yang terdiri atas lebih dari satu persamaan yang saling terkait. Bentuk umum dari sebuah sistem persamaan diferensial dalam n fungsi yang tidak diketahui dalam variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \ldots + a_{1n} + F_1(t)\\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \; + a_{2n} + F_2(t)\\
&\vdots \\
\frac{dx_m}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \ldots + a_{mn} + F_m(t)
\end{aligned} \qquad (2.2)$$

Dengan $a_{ij}(t), i = 1, 2, \ldots, n$ dan $j = i = 1, 2, \ldots, m$
(Kusumah dalam Abadiyah, 2009).

Pelinieran

Untuk suatu SPD tak linier, analisis kestabilan dilakukan melalui pelinieran. Misalkan diberikan SPD tak linier sebagai berikut : $x' = f(x)$

Dengan menggunakan ekspansi Taylor untuk suatu titik tetap x' , maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut : $x' = Ax + \varphi(x)$

Persamaan tersebut SPD tak linier dengan A adalah matriks Jacobi,

$$A = Df(x^*) = Df(x)_{x-x^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Dan $\varphi(x)$ suku berorde tinggi yang bersifat $\lim_{t\to\sim} \varphi(x) = 0$. Selanjutnya Ax pada persamaan di atas disebut pelinieran dari sistem tak linier di atas yang didapatkan dalam bentuk $x' = Ax$ (Pierre dalam Nashrullah, 2009).

Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.2

Diberikan matriks A berukuran *n x n*. Vektor tak nol ***x*** di dalam R^n disebut vector eigen *(eigen vector)* dari *A* jika *Ax* adalah kelipatan skalar dari ***x***, yakni,

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ**.** Skalar λ disebut nilai eigen *(eigenvalue)* dari *A* dan ***x*** disebut vektor eigen yang berkorespondensi dengan λ (Persulessy, 2007).

Titik Kesetimbangan (*Equillibrium*)

Misal terdapat sistem persamaan diferensial autonomous: $\dot{x} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$

dengan *f* merupakan fungsi kontinu bernilai real dari x dan mempunyai turunan parsial kontinu. Titik $\bar{x}$ disebut titik kesetimbangan (*equillibrium)* dari sistem persamaan diferensial autonomous diatas $f(\bar{x}) = 0$. Titik kesetimbangan disebut juga titik tetap atau titik kritis (Lazwardi, 2013).

Kestabilan Titik *Equillibrium*

Kestabilan titik *equilibrium* mempunyai perilaku sebagai berikut :

1) Stabil jika :
   a. Setiap nilai eigen real adalah negatif ($\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ untuk setiap i).
   b. Setiap komponen nilai eigen kompleks bagian realnya lebih kecil atau sama dengan nol, ($\mathrm{Re}(\lambda_i) \leq 0$) untuk setiap i).
2) Tak stabil jika :
   a. Terdapat minimal satu nilai eigen realnya adalah positif.
   b. Terdapat minimal satu komponen bagian real nilai eigen kompleks lebih besar dari nol (IPB, 2009).

2.4.8 Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi.

Beberapa kondisi yang akan timbul, yaitu (Giesecke dalam Tjolleng, 2013) :

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang.
2. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap.
3. JikaR_0>1, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode penelitian kepustakaan dengan tipe dan sistematika penelitian sebagai berikut :

Tipe Penelitian

Penelitian ini termasuk dalam jenis penelitian terapan, yakni penelitian yang diarahkan untuk mendapatkan informasi yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah.

Sistematika Penelitian

No.	Kegiatan	Bulan															
		I				II				III				IV			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1.	Persiapan awal :																
	a. Studi literatur																
	b. Pengambilan data di Dinas Kesehatan																
2.	Pelaksanaan :																
	a. Formulasi masalah																
	b. Membuat asumsi model																
	c. Formulasi model																
	d. Penyelesaian model matematika																
	e. Analisa data																
	f. Interpretasi solusi																
3.	Akhir :																
	Penarikan kesimpulan																
4.	Penyusunan *draft*																

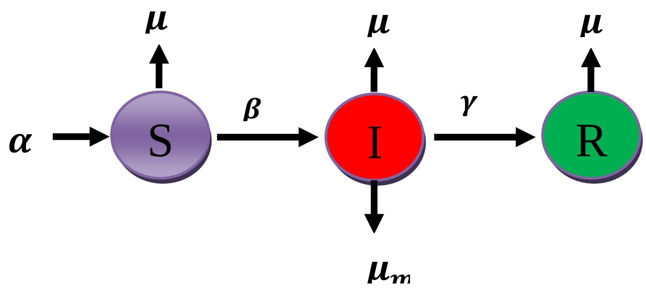
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pembentukan Model Matematika Malaria

Jumlah individu untuk masing-masing kelompok pada waktu t dinyatakan sebagai $S(t), I(t),$ dan $R(t)$. Maka,

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t) \tag{4.1}$$

Model matematika malaria seperti pada gambar 4.1 berikut :



Gambar 4.1 Diagram Alir Model Matematika Malaria (Momoh, 2012)

Berdasarkan asumsi dan gambar 4.1 di atas, maka model matematika dari penyebaran penyakit malaria adalah sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - \mu S \tag{4.2}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - I(\gamma + \mu_m + \mu) \tag{4.3}$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \tag{4.4}$$

Analisis Model Matematika

Titik Kesetimbangan [*E (S, I, R)*]

Untuk memperoleh titik kesetimbangan, sistem (4.2) – (4.4) dibuat dalam posisi konstan terhadap waktu,yaitu kondisi dimana $\frac{dS}{dt} = 0,\ \frac{dI}{dt} = 0,$ dan $\frac{dR}{dt} = 0$.

Dari sistem (4.2) - (4.4) didapatkan :

$$\alpha - \beta SI - \mu S = 0 \tag{4.5}$$

$$\beta SI - I(\gamma + \mu_m + \mu) = 0 \tag{4.6}$$

$$\gamma I - \mu R = 0 \tag{4.7}$$

Pada persamaan (4.6) :

$$\beta SI - I(\gamma + \mu_m + \mu) = 0$$

$$[\beta S - (\gamma + \mu_m + \mu)]I = 0$$

$$I = 0 \text{ atau } [\beta S - (\gamma + \mu_m + \mu)] = 0 \tag{4.8}$$

Substitusikan $I = 0$ ke dalam persamaan (4.5) :

$$\alpha - \beta S(0) - \mu S = 0$$

$$S = \frac{\alpha}{\mu}$$

Substitusikan pula $I = 0$ ke dalam persamaan (4.7):

$$\gamma(0) - \mu R = 0$$

$$R = 0$$

Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equillibrium*): $E_0 = [S, I, R] = \left[\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0\right]$.

Dari persamaan (4.8) :

$$[\beta S - (\gamma + \mu_m + \mu)] = 0$$

$$\beta S = (\gamma + \mu_m + \mu)$$

$$S = \frac{(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta} \tag{4.9}$$

Substitusikan (4.9) ke dalam persamaan (4.5) :

$$\alpha - \beta SI - \mu S = 0$$

$$\alpha - \beta\left[\frac{(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta}\right] I - \mu\left[\frac{(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta}\right] = 0$$

$$I = \frac{\alpha\beta - \mu(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta(\gamma + \mu_m + \mu)} \tag{4.10}$$

Substitusikan (4.10) ke dalam persamaan (4.7) :

$$\gamma I - \mu R = 0$$

$$\gamma\left[\frac{\alpha\beta - \mu(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta(\gamma + \mu_m + \mu)}\right] - \mu R = 0$$

$$R = \gamma\left[\frac{\alpha\beta - \mu(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta\mu(\gamma + \mu_m + \mu)}\right] \tag{4.11}$$

Dari persamaan (4.9) - (4.11), diperoleh titik kesetimbangan epidemik (*epidemic equillibrium*) sebagai berikut:

$$E_i = [S, I, R] = \left[\left(\frac{(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta}\right), \left(\frac{\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta(\gamma+\mu_m+\mu)}\right), \gamma\left(\frac{\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta\mu(\gamma+\mu_m+\mu)}\right) \right]$$

Kestabilan Titik Kesetimbangan

Nilai eigen berfungsi untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem. Untuk mencari nilai eigen, hal pertama yang perlu dilakukan adalah mencari matriks Jacobian. Dengan melakukan pelinieran sistem persamaan (4.2) - (4.4) maka diperoleh matriks Jacobian sebagai berikut :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial S}{\partial S} & \frac{\partial S}{\partial I} & \frac{\partial S}{\partial R} \\ \frac{\partial I}{\partial S} & \frac{\partial I}{\partial I} & \frac{\partial I}{\partial R} \\ \frac{\partial R}{\partial S} & \frac{\partial R}{\partial I} & \frac{\partial R}{\partial R} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & -\beta S & 0 \\ \beta I & \beta S - (\gamma + \mu + \mu_m) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Untuk mengetahui kestabilan dari titik kesetimbangan, terlebih dahulu dicari matriks Jacobian pada titik kesetimbangan, yakni sebagaimana berikut :

(i) Untuk *disease free equillibrium*,

Substitusikan $E_0 = [S, I, R] = \left[\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0\right]$ pada matris Jacobian (J), sehingga diperoleh :

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\mu & -\beta\frac{\alpha}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta\frac{\alpha}{\mu} - (\gamma + \mu + \mu_m) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Dengan mengetahui matriks Jacobian dari titik kesetimbangan bebas penyakit, nilai eigen dapat dicari dengan :

$$det\,(J_{E_0} - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} -\mu - \lambda & -\beta\frac{\alpha}{\mu} & 0 \\ 0 & \beta\frac{\alpha}{\mu} - (\gamma + \mu + \mu_m) - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\mu - \lambda)\left(\beta\frac{\alpha}{\mu} - (\gamma + \mu + \mu_m) - \lambda\right)(-\mu - \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -\mu, \qquad \lambda_2 = \beta\frac{\alpha}{\mu} - (\gamma + \mu + \mu_m), \qquad \lambda_3 = -\mu \qquad (4.12)$$

(ii) Untuk titik kesetimbangan epidemik (*epidemic equillibrium),*

Substitusikan $E_i = \left[\left(\frac{(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta}\right), \left(\frac{\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta(\gamma+\mu_m+\mu)}\right), \gamma\left(\frac{\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta\mu(\gamma+\mu_m+\mu)}\right) \right]$ pada matriks Jacobian (J), sehinga diperoleh :

$$J_{E_i} = \begin{bmatrix} -\beta\left(\frac{\alpha\beta - \mu(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta(\gamma + \mu_m + \mu)}\right) - \mu & -\beta\left(\frac{(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta}\right) & 0 \\ \beta\left(\frac{\alpha\beta - \mu(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta(\gamma + \mu_m + \mu)}\right) & \beta\left(\frac{(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta}\right) - (\gamma + \mu + \mu_m) & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Dengan mengetahui matriks Jacobian dari titik kesetimbangan epidemik (*epidemic equillibrium*), nilai eigen dapat dicari dengan :

$$det\,(J_{E_i} - \lambda I) = 0$$

$$det\begin{bmatrix} \left[-\beta\left(\frac{\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta(\gamma+\mu_m+\mu)}\right)-\mu\right]-\lambda & -\beta\left(\frac{(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta}\right) & 0 \\ \beta\left(\frac{\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta(\gamma+\mu_m+\mu)}\right) & \left[\beta\left(\frac{(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta}\right)-(\gamma+\mu+\mu_m)\right]-\lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu-\lambda \end{bmatrix}=0$$

$$\{-\mu-\lambda\}\left\{\left[-\left(\frac{\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu)}{(\gamma+\mu_m+\mu)}\right)-\mu-\lambda\right](-\lambda)+\left[(\gamma+\mu+\mu_m)\left(\frac{\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu)}{(\gamma+\mu_m+\mu)}\right)\right]\right\}=0$$

$$\{-\mu-\lambda\}\left\{\frac{\lambda(\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu))}{(\gamma+\mu_m+\mu)}+\lambda\mu+\lambda^2+(\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu))\right\}=0$$

$$\{-\mu-\lambda\}\left\{\lambda^2+\lambda\mu+\lambda\left[\left(\frac{\alpha\beta}{(\gamma+\mu_m+\mu)}\right)-\mu\right]+(\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu))\right\}=0$$

$$\{-\mu-\lambda\}\left\{\lambda^2+\lambda\mu+\lambda\left(\frac{\alpha\beta}{(\gamma+\mu_m+\mu)}\right)-\lambda\mu+(\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu))\right\}=0$$

$$\{-\mu-\lambda\}\left\{\lambda^2+\lambda\left(\frac{\alpha\beta}{(\gamma+\mu_m+\mu)}\right)+(\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu))\right\}=0$$

$$\lambda_I=-\mu,\qquad \lambda_{II}=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\qquad \lambda_{III}=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (4.13)$$

dimana $a=1, b=\left(\frac{\alpha\beta}{(\gamma+\mu_m+\mu)}\right)$, dan $c=\alpha\beta-\mu(\gamma+\mu_m+\mu)$

***Basic Reproduction Ratio* (R_0)**

Peran rasio reproduksi dasar dalam menentukan laju infeksi sangatlah penting. Agar terbebas dari infeksi malaria, harus dibuat $R_0<1$.

Misal C adalah turunan dari $\frac{dI}{dt}$, dimana $C=P-U$ terhadap I, maka :

$$\frac{d}{dI}\left(\frac{dI}{dt}\right)=\frac{d}{dI}\left(\frac{\beta SI}{N}-I(\gamma+\mu_m+\mu)\right)$$

$$C=\frac{\beta S}{N}-(\gamma+\mu_m+\mu) \qquad (4.14)$$

Substitusikan titik kesetimbangan $E_0=\left[\frac{\alpha}{\mu},0,0\right]$ dimana $S=\frac{\alpha}{\mu}, I=0, R=0$ dan $N=S+I+R=\frac{\alpha}{\mu}$ pada persamaan (4.14), sehingga diperoleh :

$$C=\beta-(\gamma+\mu_m+\mu)$$

Dari persamaan diatas dapat diketahui $P=\beta\ dan\ U=(\gamma+\mu_m+\mu)$. Sehingga diperoleh nilai *Basic Reproduction Ratio* sebagaimana berikut (Fredlina, 2012):

$$R_0=PU^{-1}$$

$$R_0=\frac{\beta}{(\gamma+\mu_m+\mu)} \qquad (4.15)$$

Nilai Ambang Batas Epidemik (S_c)

Nilai ambang batas epidemik (*epidemic threshold*) adalah suatu nilai ukuran yang menyatakan terjadinya suatu penyebaran penyakit atau tidak.

Dari model (4.3), jika $\frac{dI}{dt}<0$ maka diperoleh :

$$\beta SI-I(\gamma+\mu_m+\mu)<0$$

$$I[\beta S-(\gamma+\mu_m+\mu)]<0 \qquad (4.16)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (4.16) diperoleh bahwa: $I(t)<0$, untuk $t\geq 0$ atau $S(t)<\frac{(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta}$. Karena untuk mempertahankan $\frac{dI}{dt}<0$ pada pertidaksamaan (4.5) diperoleh bahwa $S(t)<\frac{(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta}$, maka diperoleh nilai ambang batas epidemik yaitu :

$$S_c=\frac{(\gamma+\mu_m+\mu)}{\beta} \qquad (4.17)$$

dengan $S(t) = S(0)e^{-\frac{R(t)}{\rho}} = S(0)e^{-\frac{R(t)\beta}{\gamma}}$ yang menyatakan proporsi individu yang rentan terkena penyakit malaria (Tjolleng, 2013).

Studi Kasus

Berikut adalah data sekunder kasus malaria di Kota Ambon yang diambil dari Dinas Kesehatan Provinsi Maluku :

Tabel 4.1 Perolehan nilai indikator pada model SIR

Data	**Jumlah**	**Data**	**Jumlah**
Susceptible (S)	383.286	Kelahiran	31.857
Kematian alami	31.857	*Recovered (R)*	7.083
Infected (I)	7.083	Jumlah Populasi	383.286

Dari data tersebut dapat diperoleh nilai-nilai parameter sebagai berikut :
$\alpha = 0{,}083115, \quad \mu = 0{,}083115, \quad \gamma = 0{,}018479$
$\beta = 0{,}018479, \quad \mu_m = 0$

Berdasarkan nilai parameter pada simulasi model epidemik SIR, diperoleh solusi titik kesetimbangan sebagai berikut :

(i) Titik kesetimbangan Bebas Penyakit

$E_0 = \left[\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0\right]$

Sehingga titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equillibrium*) :

$$E_0 = [1, 0, 0]$$

(ii) Titik Kesetimbangan Epidemik

$$E_i = \left[\left(\frac{(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta}\right), \left(\frac{\alpha\beta - \mu(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta(\gamma + \mu_m + \mu)}\right), \gamma\left(\frac{\alpha\beta - \mu(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta\mu(\gamma + \mu_m + \mu)}\right)\right]$$

Sehingga diperoleh titik kesetimbangan epidemik (*epidemic equillibrium*) :

$$E_i = [S = 5{,}497808, I = -3{,}680341, R = -0{,}818288]$$

Nilai eigen dapat diperoleh dengan mensubstitusikan parameter yang didapatkan ke nilai eigen pada (4.14) dan (4.15), sehingga diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

(i) Untuk *disease free equillibrium*,

$$\lambda_1 = -\mu, \quad \lambda_2 = \beta\frac{\alpha}{\mu} - (\gamma + \mu + \mu_m), \qquad \lambda_3 = -\mu$$

Sehingga diperoleh nilai eigen pada titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equillibrium*) :

$$\lambda_1 = -0{,}083115, \; \lambda_2 = -0{,}083115, \lambda_3 = -0{,}083115$$

(ii) Untuk *epidemic equillibrium*,

$$\lambda_I = -\mu, \qquad \lambda_{II} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad \lambda_{III} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dimana

$a = 1$

$b = \left(\frac{\alpha\beta}{(\gamma + \mu_m + \mu)}\right) = 0{,}015119$

$c = \alpha\beta - \mu(\gamma + \mu_m + \mu) = -0{,}006908$

Sehingga diperoleh nilai eigen pada titik kesetimbangan bebas penyakit (*epidemic equillibrium*) :

$$\lambda_I = -0{,}083115, \qquad \lambda_{II} = 0{,}0758985, \qquad \lambda_{III} = -0{,}0910175$$

Dari hasil analisa di atas bahwa semua nilai eigen pada *disease free equillibrium* adalah negatif, sedangkan nilai eigen pada *epidemic equillibrium* adalah berlainan tanda,

sehingga menyebabkan titik kesetimbangan epidemik tidak stabil. Dengan demikian, terlihat bahwa nilai eigen yang stabil adalah nilai eigen untuk titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0), yang berarti bahwa sistem akan menuju ke titik kesetimbangan$(S = 1\ , I = 0, R = 0)$.
Diperoleh pula *basic reproduction ratio* (R_0) :

$$R_0 = \frac{\beta}{(\gamma + \mu_m + \mu)} = 0{,}181891$$

Terlihat bahwa nilai $R_0 < 1$, yang berarti bahwa infeksi penyakit malaria akan berkurang, sehingga penyebaran penyakit malaria di Kota Ambon tidak sampai pada tingkat endemik. Disamping *basic reproduction ratio*, diperoleh juga nilai ambang batas epidemik yaitu :

$$S_c = \frac{(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta} = 5{,}497808 \qquad \text{dengan} \quad S(t) = S(0)e^{-\frac{R(t)}{\rho}} = 2{,}990251$$

Hal ini menunjukkan bahwa penyebaran penyakit malaria pada populasi di Kota Ambon akan mengalami penurunan. Hal ini merupakan kondisi yang diharapkan karena akan menuju kondisi yang bebas penyakit malaria.

PENUTUP

Kesimpulan

Berdasarkan analisa dan pembahasan yang telah dilakukan, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Dalam penelitian ini, bentuk tipe model SIR yang digunakan dalam memodelkan penyakit malaria adalah sebagai berikut :

$$\frac{dS}{dt} = \alpha - \beta SI - \mu S$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - I(\gamma + \mu_m + \mu)$$
$$\frac{dI}{dt} = \gamma I - \mu R$$

2. Pada analisa model diperoleh dua titik kesetimbangan dengan nilai eigennya masing-masing sebagai berikut :
   a. Titik kesetimbangan bebas penyakit (*disease free equillibrium*)

$$E_0 = [S, I, R] = \left[\frac{\alpha}{\mu}\ , 0\ , 0\right] = [1\ , 0, 0]$$

   Dengan nilai eigen :

$$\lambda_1 = -0{,}083115,\ \ \lambda_2 = -0{,}083115, \lambda_3 = -0{,}083115$$

   b. Titik kesetimbangan epidemik (*epidemic equillibrium*)

$$E_i = [S, I, R]$$
$$= \left[\left(\frac{(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta}\right), \left(\frac{\alpha\beta - \mu(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta(\gamma + \mu_m + \mu)}\right), \gamma\left(\frac{\alpha\beta - \mu(\gamma + \mu_m + \mu)}{\beta\mu(\gamma + \mu_m + \mu)}\right)\right]$$
$$= [5{,}497808; -3{,}680341; -0{,}818288]$$

   Dengan nilai eigen :

$$\lambda_I = -0{,}083115, \qquad \lambda_{II} = 0{,}0758985, \qquad \lambda_{III} = -0{,}0910175$$

   Terlihat bahwa dari kedua titik kesetimbangan diatas, titik kesetimbangan yang stabil adalah titik kesetimbangan bebas penyakit, karena ketiga nilai eigennya bernilai negatif, sementara nilai eigen pada titik kesetimbangan epidemik berlainan tanda sehingga menyebabkan titik kesetimbangan epidemik (*epidemic equillibrium*) tidak stabil.

   Diperoleh pula *Basic Reproduction Ratio:*

$$R_0 = \frac{\beta}{(\gamma + \mu_m + \mu)} = 0{,}181891$$

Terlihat bahwa $R_0 < 1$, yang berarti bahwa penyebaran penyakit malaria di Kota Ambon lambat laun akan berkurang, sehingga Kota Ambon tidak akan berada pada kondisi endemik terhadap penyakit malaria.

Saran

Untuk pengembangan skripsi ini lebih lanjut, penulis memberikan saran-saran sebagai berikut :

1. Pada tugas akhir ini, diteliti model epidemik SIR dengan jumlah populasi konstan. Diharapkan pada penelitian berikutnya diteliti model epidemik SIR atau model yang lainnya seperti SEIR, SIS, SIRS dengan jumlah populasi yang tidak konstan dan dapat pula menambahkan adanya vaksinasi pada populasi yang kemudian disimulasikan secara numerik dengan menggunakan program komputer (Matlab).
2. Pada tugas akhir ini hanya mengkaji analisa stabilitas lokal saja. Diharapkan pada penelitian selanjutnya akan ditambahkan dengan analisa stabilitas global, serta dilakukan pengendalian optimal.

DAFTAR PUSTAKA

Abadiyah, L. M. 2009. *Analisis Model Matematika Pada Pengaruh Sistem Imun Terhadap Infeksi Virus HIV*. Malang : UIN.

Hanafy,I. 2013.*Respon Imun Mus musculus Balb-C yang Divaksinasi Kelenjar Saliva Anopeles maculatus (Diptera : Culicidae) Pra dan Pasca Infeksi Plasmodium berghei Sebagai Model Transmision Blocking Vaccine*. Jember : UNJ.

Hethcote, Herbert. W. The *Basic epidemiology models ;models, expressions for Ro, parameter estimation, and applications.* World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd.[online].http://www.worldscibooks.com/mathematics/7020.html, diakses 26 Oktober 2011).

Hiswani. 2004. *Gambaran penyakit dan vector malaria di Indonesia*. Usu digital library. [online]. http://repository.usu.ac.id, diakses 26 Oktober 2011).

Imelda.2013. *Karakteristik Nyamuk Anopheles,Sp. Yang Menyebabkan Penyakit Malaria Di Daerah Kota Ambon*.Tangerang : Jurnal Sains Dan Teknologi.

IPB (Universitas Pertanian Bogor). 2009. *Model Penyebaran Penyakit Malaria*. [online]. http://www.software602.cm/

Kemenkes RI. 2013. *Riset Kesehatan Dasar*. Jakarta : Badan Penelitian dan Pengembangan Kesehatan.

Lazwardi, R. T. 2013. *Analisis Model Matepopulasi Pada Transmisi Virus Hepatitis A (HAV)*. Bandung : UIN.

Nashrullah, A. 2013. *Pemodelan SIRS untuk Penyakit Influenza Dengan Vaksinasi Pada Populasi Manusia Dengan Laju Recruitment and Death*.Semarang.

Persulessy, E. R. 2007. *Aljabar Linier Elementer*. Ambon : UPJM Universitas Pattimura.

Subiono. 2013. *Sistem Linier dan Kontrol Optimal*. Surabaya: ITS.

Tjolleng, A. 2013. *Dinamika Perkembangan HIV/AIDS di Sulawesi Utara Menggunakan Model Persamaan Diferensial Nonlinear SIR (Susceptible, Infectious And Recovered)*. Manado : Jurnal Ilmiah Sains Vol. 13 N.

Widowati, Sutimin. 2007. *Buku Ajar Pemodelan Matematika*. Semarang : Universitas Diponegoro.